


**Défense et illustration de la « raison graphique » ou comment l'écrit, outil de pensée, est un moyen puissant d'apprentissage. Carole Cane en fait la « démonstration » à l'aide d'exemples puisés dans la vie de sa classe.**

# MATHÉMATIQUES : ÉCRIRE POUR MIEUX CHERCHER

Carole CANE

Les écrits, et en particulier les écrits de recherche, c'est-à-dire ceux qui portent la trace de démarches individuelles ou collectives, sont déterminants au cours des activités mathématiques. Ils contribuent à développer chez les élèves des capacités de recherche, de justification des choix, d'argumentation et permettent de créer les conditions de véritables interactions conflictuelles, notamment à travers le travail de groupe.

## LA CONSTRUCTION DES SAVOIRS EN MATHÉMATIQUES

« [...] *faire des maths, c'est les FAIRE, au sens propre du terme, les construire, les fabriquer, les produire, que ce soit dans l'histoire de la pensée humaine ou dans l'apprentissage individuel. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire réinventer par les élèves des mathématiques qui existent déjà mais de les engager dans un processus de production mathématique où leur activité ait le même sens que celle des mathématiciens qui ont effectivement forgé des concepts mathématiques nouveaux. Ce qui est important pour l'élève, ce n'est pas de connaître la solution, c'est d'être capable de la trouver lui-même et de se construire ainsi, à travers son activité mathématique, une image de soi positive, valorisante, face aux mathématiques.* ».[1]

1. R. BKOUCHE, B. CHARLOT, N. ROUCHE *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Ed. Armand Colin, 1991 (cité dans www.ac-amiens.fr/inspections/80/amiens5/site/maths80/dvalentin/faire-des-maths.pdf)

Après une phase de recherche individuelle où l'enfant s'approprie et construit une représentation individuelle et une résolution personnelle du problème, il est nécessaire de mettre en place une phase de confrontation, soit en petits groupes soit en classe entière. Les interactions entre pairs permettent d'une part « la *déstabilisation des croyances des élèves* »[2] et « *la constitution de nouveaux savoirs* ».[2] Cette confrontation aide donc l'enfant à valider ou invalider ses solutions.

**2.** DESCAVES Alain (1992), *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Paris, Hachette Éducation, p.97

L'apprentissage nécessite une construction personnelle par chaque sujet. Tout apprentissage passe par une activité mentale de réorganisation du système de pensée et de connaissances existantes chez chacun. Sans cette activité, aucun savoir nouveau ne peut être intégré. Les interactions sociales sont nécessaires pour que cette construction ait lieu. Les échanges que l'élève établit avec les autres élèves ou l'enseignant lui permettent de remettre en cause ses savoirs, afin d'en construire de nouveaux.

Ainsi, il faut créer les conditions, le désir de construire ensemble. Mais il est également essentiel d'aider l'élève à faire le bilan de sa démarche, en l'amenant à verbaliser sa réflexion, à comparer les connaissances antérieures avec les nouvelles connaissances acquises, en lui permettant d'analyser ses stratégies.

## LES ÉCRITS INTERMÉDIAIRES EN MATHÉMATIQUES

Selon Chabanne et Bucheton dans *Parler et Écrire pour penser, apprendre et se construire* (PUF, 2002) « *intermédiaire peut être pris dans de nombreux sens : intermédiaire entre deux états d'un écrit à mettre en forme, entre deux états de pensée, entre les membres d'un groupe de travail, entre des écrits et des oraux, etc* ». Il est alors « *une médiation entre deux sujets, entre deux discours, entre le sujet et lui-même* » et possède un *« caractère transitoire et lié à des situations précises de travail.* ». Il s'agit donc bien d'écrits pour : ➔ penser, car ils servent à élaborer, structurer ou restructurer la réflexion ➔ apprendre car, en écrivant leur réflexion et en travaillant sur celle-ci, les élèves la transforment et construisent leur savoir ➔ se construire, car « *[...] écrire, c'est projeter une image de soi. C'est donc prendre le risque de se constituer en temps que personne, d'où la mise en danger que constitue toute prise de parole; mais c'est aussi faire exister entre moi et les autres, une différence qui me construit; non de manière figée mais de manière dynamique puisque sans cesse négociée* ».

En mathématiques, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat. À ces différents moments de l'apprentissage correspondent différents écrits.

■ **les écrits personnels de recherche ou brouillon.** Durant l'étape de recherche individuelle, la trace écrite a une grande importance. Elle est, en effet, transitoire et correspond à une étape dans le processus d'apprentissage. Celle-ci permet à l'enfant d'identifier sa pensée, de se positionner en tant que personne, afin de préparer la phase de débat. Grâce à cet écrit, les enfants confronteront des arguments au lieu de se laisser convaincre.

Avec ce type d'écrit, les élèves cherchent, acceptent de se tromper, de recommencer : erreurs et tentatives sont donc des étapes nécessaires pour réussir.

■ **les écrits destinés à être communiqués : l'affiche ou le transparent.** Ces écrits sont en général des écrits de groupe et ont très souvent pour vocation de communiquer aux autres ce que le groupe a fait.

Cet écrit va servir **à exposer, à expliquer et à convaincre.** Il est donc plus travaillé dans sa forme que l'écrit individuel, puisque les autres élèves de la classe doivent pouvoir le lire et le comprendre. Il se présente sous différents formats : affiche, transparent... Il pourra cependant présenter des conclusions erronées, mais aussi des imperfections de vocabulaire ou de syntaxe, que l'échange oral permettra de pointer.

■ **le cahier aide-mémoire des problèmes.** Comme l'explique B.M. Barth dans *Le Savoir en construction* (1993, Retz), la construction par l'élève de compétences métacognitives étant un préalable pour qu'il s'approprie les savoirs scolaires, il est essentiel de lui permettre de construire des outils mentaux pour apprendre. La mise en place d'un cahier aide-mémoire y contribue. Après une activité de résolution de problèmes, chaque enfant essaie d'y expliquer ce qu'il a appris en résolvant tel problème, ce qu'il a oublié de faire, ce qu'il fera la prochaine fois.

## L'UTILISATION DU BROUILLON COMME AIDE À LA REPRÉSENTATION ET À LA CONFRONTATION

■ **Qu'est-ce que se représenter un problème ?** Dans son ouvrage intitulé *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques* (PUR, 1995)[3], J. Julo définit ainsi le processus de représentation : « *Se représenter un problème, c'est non seulement se représenter un objet particulier défini par un ensemble d'informations qui nous est fourni, mais aussi se représenter la tâche particulière qui est associée à cet objet* ». L'activité de représentation débute donc avec les premières informations, et se poursuit jusqu'au moment où nous arrêtons la démarche de réflexion.

**3.** On trouve sur le site de l'IUFM de Créteil (www.maths.creteil.iufm.fr/Premier_degre/int1par.htm) un résumé de cet ouvrage actuellement épuisé.

■ **Comment se construit la représentation ?** Elle est le résultat de trois processus qui interagissent entre eux.

→ Le processus d'interprétation du contexte sémantique et de sélection des informations. Les données du problème, les connaissances dont nous disposons et les informations issues de notre environnement permettent de construire le contenu de notre représentation.

→ Le processus de structuration. Le contenu de la représentation forme un tout cohérent qui se structure au fur et à mesure de l'analyse du problème et en fonction des problèmes rencontrés antérieurement.

→ Le processus d'opérationnalisation. Il permet le passage à l'action effective ou mentale, de façon à atteindre le but proposé. Pour cela, le sujet met en œuvre les connaissances opératoires issues de ses expériences passées

J. Julo montre l'impact de la représentation sur la résolution d'un problème : *« C'est en fonction de la représentation qu'il s'est faite du problème que le sujet détermine les connaissances qui doivent être activées dans sa mémoire à long terme pour être mises à la disposition de la recherche de solutions »*. Il a mené de nombreuses recherches à ce sujet, qui montrent que la plupart des erreurs en résolution de problèmes peuvent être imputées à des difficultés survenant lors de la phase de représentation. Suite à ce constat, on peut faire deux hypothèses : ➔ soit les élèves ne cherchent pas à se représenter les problèmes : ils omettent cette phase parce qu'ils n'en voient pas l'utilité ; ➔ soit ils ne savent pas comment se représenter les problèmes : ils se trouvent dépourvus face à ce type de tâche.

■ **Comment aider les élèves à se construire une représentation ?** J. Julo définit cinq catégories d'aide : les explicitations (rendre le but et les conditions de réalisation du but plus explicites), les problèmes analogues (même structure sous plusieurs versions), les tâches surajoutées (tâches secondaires proposant un sous-but), les outils de modélisation et les explications.

L'écrit intermédiaire est une aide à l'explicitation du problème, première phase du processus de représentation. Le passage à l'écrit favorise la visualisation des données et des liens qui les unissent. Dans ce cadre, le brouillon est plus qu'un écrit de recherche, c'est aussi l'écrit sur lequel l'enfant se représente l'énoncé. Il représente les données essentielles d'un problème et les relations existant entre elles, permet de sortir les informations du texte et de les disposer de manière à les rendre accessibles et soulage la mémoire de travail.

C'est grâce à l'analyse de ses propres démarches de résolution que l'élève donne du sens aux situations et construit son savoir mathématique. Il faut l'«aider à progresser dans sa représentation du problème». Cela impose, par conséquent, d'*« avoir une grande tolérance à l'égard des premières productions, accompagnée d'une grande attention à ce qu'elles cherchent à dire, pour une relance positive. »*.

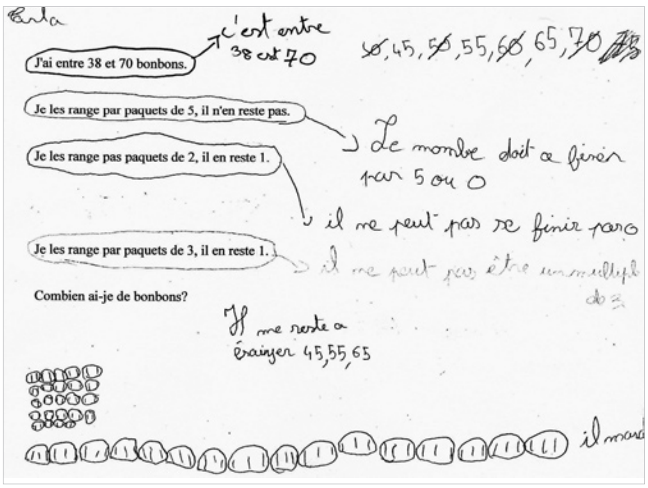
Il s'agit alors de proposer aux enfants plusieurs formes de représentation, de les mettre en valeur, et de laisser l'élève choisir celle qui lui convient, en fonction du problème à résoudre. Parmi ces formes, Goody, qui s'intéresse à la manière dont l'écriture libère l'homme du problème de la mémorisation, s'intéresse particulièrement à deux procédés d'écriture –la liste, le tableau– et explique qu'ils ont joué un rôle décisif dans ce qu'il nomme : la domestication de la pensée sauvage. Il explique ainsi que la liste, en plus d'être un écrit de mémorisation, facilite l'organisation spatiale des données, favorise le développement de l'activité cognitive et permet à l'individu de manipuler les informations et de les ordonner. Le tableau, quant à lui, est le moyen par lequel on met en ordre la connaissance, on simplifie la réalité et on souligne les oppositions ou les analogies.

### ■ des exemples de brouillon

*exemple 1 :* Voici l'exemple d'un problème qui peut difficilement être résolu, si on n'organise pas sa pensée, d'où l'intérêt de mettre en place des stratégies permettant de structurer son écrit et donc sa réflexion.

**Enoncé**

*J'ai entre 38 et 70 bonbons.*
*Je les range par paquets de 5, il n'en reste pas.*
*Je les range par paquets de 2, il en reste 1.*
*Je les range par paquets de 3, il en reste 1.*
*Combien ai-je de bonbons ?*



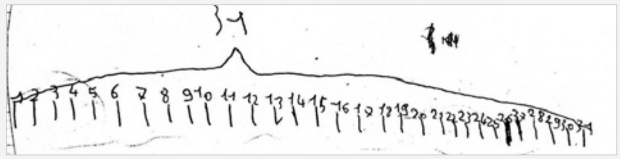

*exemple 2 :* La représentation graphique permet d'illustrer simplement un réseau d'informations complexes. Les représentations graphiques d'un même problème peuvent être multiples. On peut donc aider l'enfant à enrichir son répertoire de schématisation.

**Énoncé**

*31 coureurs participent à une course. Il y a 4 fois plus de coureurs derrière Jean que devant . Quelle est la place de Jean ?*

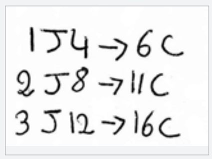
Voici des représentations graphiques différentes: deux que l'on pourrait appeler schémas personnels, un autre sous forme de tableau à double entrée.

1er écrit :



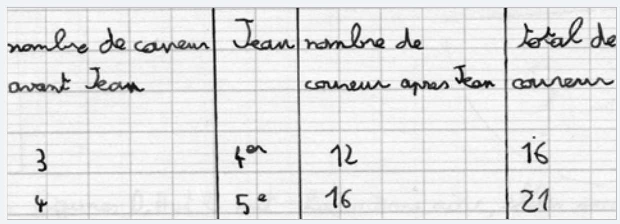
**Flora :** *« j'ai dessiné les coureurs. Maintenant, je vais essayer s'il peut-être 26ème par exemple. »*

2ème écrit :




**Eva :** *« Si Jean est troisième alors il y 2 joueurs devant lui et 8 derrière, donc il y a 11 coureurs en tout, mais on nous dit qu'il y a 31 coureurs donc ça ne marche pas.*
*Alors j'ai essayé s'il est quatrième, et....*
*...... je vais continuer comme ça »*

3ème écrit :



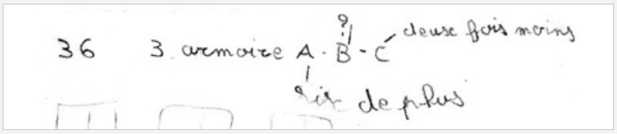

**Thomas :** *« Jean ne peut pas être 4ème sinon il y aurait 16 coureurs. Il ne peut pas être 5ème sinon il y aurait 21 coureurs. Je vais continuer comme ça »*

*exemple 3 :* Le brouillon, en tant qu'écrit permettant de reformuler l'énoncé, aide à progresser dans la représentation d'un problème.

**Énoncé** :

*La sorcière Maléfix a rangé 36 balais dans 3 armoires A,B,C. Dans l'armoire A, il y a six balais de plus que dans l'armoire B. Dans l'armoire C, il y a deux fois moins de balais que dans l'armoire B. Combien de balais Maléfix a-t-elle rangés dans chaque armoire ?*

Les travaux de Corentin et de Noé correspondent à deux essais de reformulation du problème. Celle-ci se situe avant le début des recherches, et leur permet de se rendre compte qu'il est plus judicieux d'essayer de remplir l'armoire B en premier : ils ne suivent donc pas l'ordre établi par l'énoncé.




Brouillon de Noé


Brouillon de Corentin

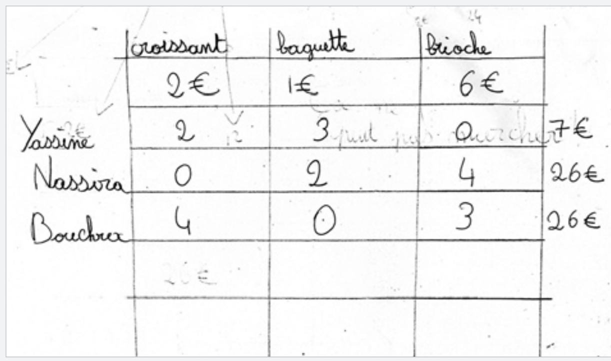
Corentin va même plus loin en ajoutant un indice : *« le nombre de balais de l'armoire B est forcément pair. »*.

*exemple 4 :* Le brouillon s'il est structuré peut permettre de mettre en valeur les erreurs.

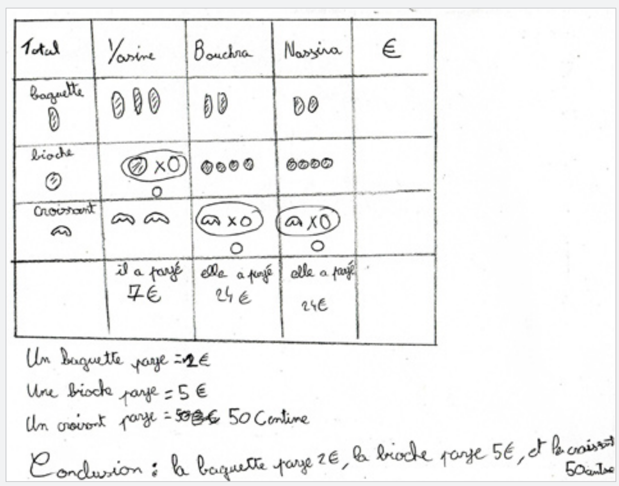
**Énoncé :**

*Ce matin, à 8 heures, trois enfants sont allés chez le boulanger. Yassine a payé 7€ pour trois baguettes et deux croissants ; Bouchra a payé 26€ pour deux baguettes et quatre brioches ; Nassina a payé la même somme que Bouchra pour quatre croissants et trois brioches. Quel est le prix d'une baguette ? d'un croissant ? d'une brioche ?*

Ces exemples d'écrits montrent que grâce au brouillon, les enfants se rendent compte de leur fausse représentation et donc progressent vers une représentation juste. En effet, au moment de la confrontation à l'intérieur du groupe de quatre auquel ils appartiennent, Carla et Tony comparent leurs résultats. Les enfants s'impliquent dans le processus de validation, et n'attendent pas l'adulte pour vérifier à leur place. Ils cherchent par eux-mêmes, s'interrogent sur le caractère plausible du résultat trouvé. Tony et Carla ont un vrai écrit de recherche. Grâce à celui-ci, Tony explique à Carla qu'elle a mal compris la phrase *« Nassira a payé la même somme que Bouchra pour quatre croissants et trois brioches »* : cela ne veut pas dire qu'elle a acheté la même chose.




Brouillon de Tony




Brouillon de Carla

## L'AFFICHE, OUTIL DE COMMUNICATION ET DE STRUCTURATION DES SAVOIRS

L'affiche doit : ➔ permettre aux élèves de valider ou d'invalider leur solution et celle des autres ➔ leur faire acquérir une méthodologie qu'ils pourront réinvestir dans d'autres problèmes de recherche ➔ dans certains cas les aider à construire une solution experte.

Les élèves doivent organiser leur réponse afin que leur affiche soit un outil de communication. Ils doivent acquérir le vocabulaire spécifique et rigoureux en mathématiques, et trouver des stratégies pour exprimer leur démarche à l'écrit.

La pratique montre que les enfants essaient de mettre en place des stratégies pour rendre leur argumentation plus claire : couleurs, flèches, hachurage de parties. Ces procédés, qui ont pour but de valoriser leur solution, ont trois impacts essentiels au moment de la mise en commun, phase primordiale pour faire évoluer les méthodes, expliciter les conceptions erronées et valider les solutions trouvées.

➔ Ils facilitent la gestion des échanges, en permettant de préparer plus efficacement la mise en commun à la fin de la recherche de groupe : les écrits étant clairs, les analyser rapidement et fixer un ordre de passage intéressant devient plus aisé pour l'enseignant.

➔ D'autre part, la solution étant plus clairement exposée, elle met aussi en valeur les erreurs et facilite leur repérage plus rapide lors de la mise en commun.

➔ Enfin, l'effort d'explicitation réalisé par les élèves implique l'emploi de termes peu rigoureux et permet dès lors la mise en place d'un vocabulaire mathématique.

L'affiche est un outil efficace pour enseigner l'argumentation et pour favoriser l'appropriation par les élèves d'un vocabulaire spécifique aux mathématiques.

## CONCLUSION

Le brouillon et l'affiche, s'ils ne sont pas une finalité, constituent une étape importante dans l'apprentissage. En effet, ils sont les supports d'une intense activité langagière et –parce que la langue écrite est un bon outil pour argumenter et communiquer– offrent réellement aux élèves la possibilité de penser et de construire ensemble.

Ajoutons que, dans les activités de résolution problème, la confrontation des brouillons favorise l'observation de diverses formes de formulations d'un même problème et permet un apprentissage spécifique sur la représentation, phase importante vers la résolution. Dans cette perspective, l'erreur ne peut être stigmatisée. Au contraire, il est important de la mettre en valeur, de lui donner un statut positif, de montrer qu'elle est une étape incontournable vers la solution et d'en tirer parti.

La confrontation des affiches est aussi un moment privilégié : les élèves reformulent, corrigent, contestent les propositions de leurs camarades ou même les leurs, ce qui débouche sur l'élaboration d'une trace écrite satisfaisante dans la forme et le contenu. On voit bien alors combien *« l'interaction sociale peut être structurante et génératrice de nouvelles connaissances »*[4]

**4.** DESCAVES Alain (1992), *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Paris, Hachette Éducation, p.101

Quant au cahier aide-mémoire, c'est un outil accompagnant l'enfant dans sa construction des savoirs. Il l'amène à revenir par l'analyse sur les stratégies développées pendant la phase de recherche, à faire le bilan de sa démarche et à mesurer le chemin parcouru.

■ **Carole CANE**

Il ne faut pas qu'un certain pessimisme serve d'excuse à la paresse de l'esprit.
**Louis GUILLOUX**, ***Carnets 1921-1944***