

Recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée n -ième
Fiche descriptive

Niveau d'enseignement :	Terminale S
Type d'activité :	Résolution d'un problème
Durée :	1 heure
Outils :	Logiciel de calcul formel
Compétences TICE :	Savoir utiliser quelques commandes de base, en particulier celles qui permettent : <ul style="list-style-type: none"> • de rentrer l'expression d'une fonction • d'obtenir l'expression d'une primitive • de simplifier une expression
Compétences mathématiques :	<p>Connaître la notion de dérivée et la notion de suites géométriques.</p> <p>S'approprier la notion de primitive :</p> <ul style="list-style-type: none"> • lien dérivée/primitive • expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale • lien entre deux primitives d'une même fonction <p>Être capable de mettre en œuvre des connaissances sur les suites géométriques dans une situation complexe et peu habituelle.</p> <p>Mener à terme une intégration par parties.</p>
Évaluation :	Une grille d'observation est proposée pour aider l'enseignant à observer la mise en œuvre ou non de certaines compétences chez les élèves.
Place dans la progression, moment de l'étude :	Ce TP peut être une activité de synthèse sur la notion de primitive, sur le lien avec le calcul intégral et sur l'intégration par parties. Il permet également de revisiter les suites géométriques.

Recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée n -ième
Fiche professeur

L'énoncé propose un véritable problème mathématique choisi de telle sorte que l'outil TICE favorise l'activité mathématique de l'élève. Le problème posé est assez complexe. L'élève doit commencer par élaborer une stratégie mathématique pour l'aborder comme, par exemple, transformer la question posée (chercher une fonction ayant pour dérivée n -ième une fonction f donnée) en une autre plus facile à traiter (chercher des primitives successives de la fonction f proposée). L'énoncé gagne à rester sous la forme ouverte proposée qui sollicite le raisonnement de l'élève et sa prise d'initiative.

Aide possible pour démarrer

Si besoin, le professeur pourra suggérer aux élèves de recourir à un logiciel de calcul formel pour « explorer » et trouver les premières fonctions F_n .

Avantages du recours à un logiciel de calcul formel

En tant qu'assistant de calcul, le logiciel de calcul formel permet d'une part de se consacrer au problème posé et donc de se concentrer sur les notions mathématiques sous-jacentes (compréhension du problème) et, d'autre part, de multiplier les calculs dans un temps limité ce qui facilite l'accès à une conjecture (vision plus globale du problème). C'est aussi un formidable outil de démarche d'investigation. Il permet à l'élève de se poser des questions, d'affiner son observation, de poursuivre l'expérimentation en changeant éventuellement de piste ...

Le logiciel de calcul formel participe également à la gestion de l'hétérogénéité des élèves. Tout élève peut démarrer sans être bloqué d'emblée par des calculs qui peuvent s'avérer bien difficiles. Dans cet esprit, le professeur pourra être amené à différencier le degré d'exigence concernant les réponses attendues et les preuves.

Conjectures possibles Pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+4} = -\frac{1}{4}a_n, \text{ d'où : } a_{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_0 = 0, a_{4n+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_1 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n,$$

$$a_{4n+2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n, a_{4n+3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n a_3 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \dots$$

De même pour (b_n) . On peut aussi conjecturer que $b_{n+2} = \frac{1}{2}a_n$ et $a_{n+2} = -\frac{1}{2}b_n$.

Un échange dans la classe devrait faire émerger le fait qu'il suffit de calculer des primitives des fonctions $x \mapsto e^x \cos x$ et $x \mapsto e^x \sin x$ pour aboutir. Ces calculs peuvent alors faire l'objet d'un travail à la maison.

Recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée n -ième

Fiche élève

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^x \sin x$.

Le but de l'exercice est de déterminer des suites réelles (a_n) et (b_n) telles, pour tout entier naturel n non nul, la dérivée n -ième de la fonction $F_n : x \mapsto (a_n \cos x + b_n \sin x)e^x$ soit égale à la fonction f .

1. Déterminer les fonctions F_1 , F_2 et F_3 .
2. Conjecturer, pour tout entier naturel n , les expressions de a_n et de b_n en fonction de n .
3. Démontrer la conjecture.

Indications pour utiliser le logiciel MAXIMA

Tâche	Aide logicielle
Définir une fonction	Pour définir une fonction f , on peut utiliser l'opérateur « := » ou recourir à la fonctionnalité « define ». Ainsi, pour définir la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$, on peut rentrer au choix : $f(x) := x^2 + 2 * x - 3 \quad \text{ou} \quad \text{define}(f(x), x^2 + 2 * x - 3)$ <ul style="list-style-type: none"> L'opérateur « : » permet d'affecter une valeur à une variable. Ainsi, pour donner la valeur 2 à la variable a, on tape : $a : 2$ L'opérateur « = » indique une équation. Les parenthèses et crochets ouverts sont fermés automatiquement. Pour entrer un produit, il faut recourir au symbole « * ». Concernant la fonction exponentielle : pour le nombre réel e, on tape : % e, et, pour l'expression e^x, on tape : exp(x) ou % e^x.
Dériver une fonction	Pour dériver la fonction f , on utilise la commande « diff » et on tape : $\text{diff}(f(x), x)$ pour la dérivée première, $\text{diff}(f(x), x, 2)$ pour la dérivée seconde ...
Calculer une primitive	Pour calculer une primitive de la fonction f , on utilise la commande « integrate » et on tape : $\text{integrate}(f(x), x)$.
Simplifier une expression	Pour simplifier une expression, on utilise la commande « radcan ». Par exemple, en tapant $\text{radcan}(\exp(x) * \exp(-x))$, on obtient 1. La commande « radcan » est aussi directement accessible par le menu « Simplifie(r) » situé dans le bandeau en bas de l'écran.
Faire appel à un résultat	<ul style="list-style-type: none"> % fait référence au dernier résultat. Ainsi, pour dériver par rapport à x le contenu de la ligne précédente, on tape $\text{diff}(\%, x)$. Les entrées et les sorties sont respectivement référencées %i1, %i2 et %o1, %o2 ... (lettre o). Il est possible d'y faire appel. Ainsi pour affecter à E le résultat de la 3^{ème} sortie, on tape : $E : \%o3$
Résoudre un système	Pour résoudre des équations, on utilise la commande « solve ». Ainsi : <ul style="list-style-type: none"> pour résoudre l'équation $t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0$ d'inconnue t, on tape : $\text{solve}(t^3 - 3 * t^2 + t + 1 = 0, t)$ pour résoudre le système formé par les équations $2x + 3y = 1$ et $x + 7y = 3$, on tape : $\text{solve}([2 * x + 3 * y = 1, x + 7 * y = 3], [x, y])$
Réinitialiser	Pour détruire tous les objets introduits, on tape : $\text{kill}(\text{all})$

Recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée n -ième : grille d'évaluation de compétences

Cette grille a pour objectif de permettre au professeur de repérer le degré d'autonomie d'un élève dans le cadre de la résolution d'un problème mathématique.

À cet effet, quelques « compétences évoluées » ont été identifiées. Afin d'apprécier le degré de maîtrise de ces compétences par l'élève, une liste non exhaustive d'attitudes est proposée. Des aides éventuelles sont également suggérées. Elles ont été numérotées pour faciliter la prise d'informations pendant la séance. La fiche d'observation de la classe, jointe à ce document, devrait être un outil efficace aussi bien dans le cadre de la formation de l'élève que dans le cadre d'une évaluation :

- en formation, le professeur consigne sur la fiche les blocages éventuels de chaque élève et l'aide apportée ;
- en évaluation, il prend note des traces de recherche, même incomplètes, ou d'initiative, même non fructueuses, afin de les valoriser.

Les aides suggérées dans la grille ont pour objectif de diriger l'élève vers la résolution du problème par la recherche de primitives. Un élève plus autonome peut aborder le problème différemment par exemple par dérivation, à l'aide d'un tableur, ...

Compétences proposées	Exemples d'attitudes permettant de situer l'élève	Exemples d'aides éventuelles
<i>Être capable de modéliser et de s'engager dans une activité de recherche</i>	Activité de recherche <ul style="list-style-type: none"> • L'élève sait mettre en œuvre le lien dérivée/primitive. • L'élève élabore une stratégie mathématique pour aborder le problème posé. Il pense par exemple à rechercher des primitives successives de la fonction f. 	A1 : demander de rappeler le lien dérivée/primitive A2 : suggérer de traduire la définition des fonctions F_n en terme de primitives
<i>Être capable de pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique</i>	<ul style="list-style-type: none"> • L'élève sait utiliser les potentialités d'un logiciel pour proposer des premiers résultats. • L'élève multiplie des essais, il émet une conjecture. • L'élève teste sa conjecture, la valide ou l'invalidé. • L'élève fait preuve d'initiative, il affine son observation et change éventuellement de piste. 	B1 : suggérer de recourir à un logiciel de calcul formel pour « explorer » en multipliant les essais B2 : suggérer la recherche d'un lien entre les a_n et les b_n successifs (de quatre en quatre, ou de deux en deux) B3 : suggérer de rechercher un lien entre a_n et a_{n+4} B4 : suggérer le modèle « suite géométrique »
<i>Être capable de conduire un raisonnement, une démonstration</i>	<ul style="list-style-type: none"> • L'élève propose des idées de preuve (*) à l'oral ou à l'écrit. • L'élève élabore un schéma de démonstration en précisant les différentes étapes. <p>(*) La rédaction peut faire l'objet d'un travail à la maison.</p>	C1 : demander de rappeler l'expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale C2 : faire rappeler le lien entre deux primitives d'une fonction C3 : demander une méthode permettant le calcul d'une primitive d'une fonction du type $x \mapsto e^x \sin x$ ou $x \mapsto e^x \cos x$ C4 : demander la formule de l'intégration par parties C5 : suggérer des intégrations par parties successives

Recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée n -ième : fiche d'observation de classe

Élèves	<i>L'élève est capable de modéliser et de s'engager dans une activité de recherche</i>	<i>L'élève est capable de pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique</i>	<i>L'élève est capable de conduire un raisonnement, une démonstration</i>
Sophie			
Marc			
Antoine			
Etc			