

**LONGUEUR MINIMALE***Fiche descriptive*

<b>Niveau d'enseignement :</b>	Première S
<b>Type d'activité :</b>	Problème ouvert
<b>Durée :</b>	1h
<b>Outils :</b>	Logiciel de géométrie dynamique plane
<b>Compétences TICE :</b>	Créer une figure correspondant à la situation décrite et, en particulier, placer un point mobile sur un arc de cercle. Créer des affichages (longueurs, mesures d'angles ...)
<b>Compétences mathématiques :</b>	Analyser une figure pour justifier des égalités de longueurs, ou d'angles. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction d'une variable bien choisie. Dériver une fonction rationnelle. Étudier le signe d'un trinôme. Obtenir le sens de variation d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée.
<b>Place dans la progression, moment de l'étude :</b>	En fin d'année, pour faire vivre la dérivation et le second degré tout en motivant un devoir en temps libre.

**LONGUEUR MINIMALE***Fiche professeur*

La difficulté de l'exercice proposé réside dans le choix de la variable en fonction de laquelle on va exprimer la longueur à optimiser. La première idée des élèves sera sans doute de repérer le point T par une mesure de l'angle ADT, ce qui peut paraître tout à fait pertinent *a priori*. Mais le calcul de la longueur MN en fonction de cet angle (il faut laisser faire ce calcul aux élèves) mène à une somme de tangentes dont l'étude relève plutôt de la classe de terminale S. Il faut donc réfléchir à un autre choix. Le logiciel permet de repérer les différentes grandeurs variables en jeu. Avant la fin de l'heure, on se met d'accord avec la classe pour essayer de répondre au problème en choisissant pour variable la longueur AM. Reste à organiser le calcul permettant d'exprimer la longueur MN en fonction de la longueur AM.

Le travail à faire à l'issue de ce TP en salle informatique peut alors être conduit en trois temps ce qui permet d'accompagner au mieux le travail personnel de l'élève.

**Temps 1 : recherche à la maison et au brouillon des questions suivantes qui ont pour objectif d'exprimer la longueur MN en fonction de la longueur AM.**

On choisit le cm pour unité de longueur, et on pose  $AM = x$  et  $TN = y$ .

- Démontrer que  $AM = MT$  et  $TN = NC$ .
- Justifier l'égalité  $(x + y)^2 = (6 - x)^2 + (6 - y)^2$ .
- En déduire l'expression de  $y$  en fonction de  $x$ .
- Donner finalement l'expression de la longueur MN en fonction de  $x$ .

**Temps 2 : le rendez-vous en classe**

Le point est fait avec les élèves sur les propriétés utilisées et les réponses obtenues. Un petit débat de classe permet alors de se mettre d'accord sur la méthode à mettre en œuvre pour répondre au problème. Le texte ci-dessous est alors distribué.

**Temps 3 : devoir libre à rédiger pour la semaine suivante**

1°) Rédiger les questions **a)**, **b)**, **c)** et **d)** (cf ci-dessus).

2°) On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 6]$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 36}{x + 6}$ .

- Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations.
- Déduire de l'étude précédente la valeur exacte de la longueur AM pour laquelle la longueur MN est minimale.
- Déterminer la position du point T sur l'arc AC qui correspond à ce minimum.

## LONGUEUR MINIMALE

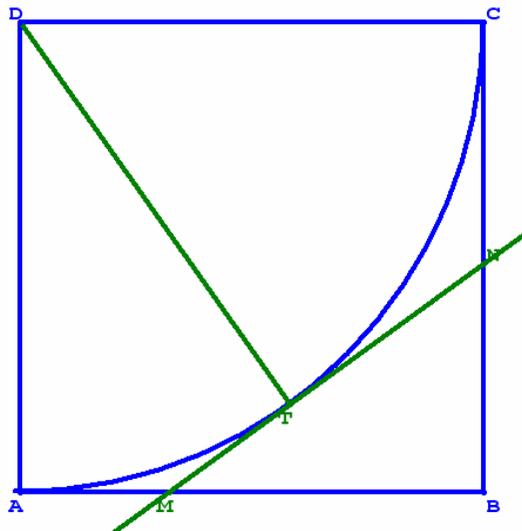
*Fiche élève*

ABCD est un carré dont le côté a pour longueur 6 cm.

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre D passant par le point A.

T est un point mobile sur l'arc AC intérieur au carré. On prend T distinct des points A et C.

La tangente au cercle  $\mathcal{C}$  au point T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.



L'objectif de cet exercice est de déterminer la position du point T sur l'arc AC pour laquelle la longueur du segment [MN] est minimale.

- a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique plane, créer une figure qui permette de conjecturer la position du point T qui rend la longueur MN minimale. Créer les affichages (longueurs, angles...) qui peuvent aider à résoudre le problème.
- b) Réfléchir à des éléments de preuve.

## Aide à la construction avec le logiciel **GEOPLAN W**

Tâches à accomplir	Aide
Créer un carré de côté 6cm	<i>On peut faire la construction dans le repère proposé par le logiciel ( A à l'origine, B sur l'axe des abscisses ... ). Pour cela suivre Créer ; Point ; Point repéré ; Dans le plan <b>Abscisse : 0 Ordonnée : 0 Nom du point : A puis OK.</b></i>  <i>Pour créer les points suivants, cliquer sur l'icône  bis</i>
Créer l'arc de cercle AC	<i>Suivre Créer ; Ligne ; Arc de cercle ; Arc défini par extrémités et centre <b>Nom du centre : D Origine : A Extrémité : C</b> <b>Nom de l'arc : c puis OK</b> <i>Si on prend C pour origine et A pour extrémité, on obtient l'arc de C à A dans le sens trigonométrique.</i></i>
Créer un point libre sur	<i>Suivre Créer ; Point ; Point libre ; Sur un arc <b>Nom de l'arc : c Nom du point : T puis OK</b></i>
Créer un segment	<i>Suivre Créer ; Ligne ....</i>
Créer une droite perpendiculaire	<i>Suivre Créer ; Ligne ....</i>
Créer des points d'intersection	<i>Suivre Point ; Intersection 2 droites (ou droite cercle ou 2 cercles)</i>
Piloter un point au clavier	<i>Suivre Piloter ; Piloter au clavier. <b>Sélectionner le point à piloter puis OK</b></i>
Afficher une grandeur	<i>Suivre Créer ; Affichage ; Longueur d'un segment ou Mesure d'un angle géométrique ...</i>
Modifier un objet créé	<i>Suivre Divers ; Modifier/Dupliquer.</i>
Supprimer un objet créé	<i>Suivre Divers ; Supprimer.</i>
Créer un style ( couleur, épaisseur)	<i>Cliquer sur l'icône ci-contre qui donne les styles </i>

## LONGUEUR MINIMALE

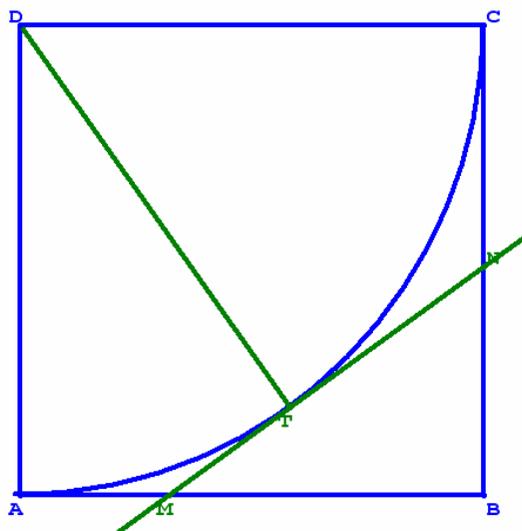
Fiche élève

ABCD est un carré dont le côté a pour longueur 6 cm.

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre D passant par le point A.

T est un point mobile sur l'arc AC intérieur au carré. On prend T distinct des points A et C.

La tangente au cercle  $\mathcal{C}$  au point T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.



L'objectif de cet exercice est de déterminer la position du point T sur l'arc AC pour laquelle la longueur du segment [MN] est minimale.

- a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique plane, créer une figure qui permette de conjecturer la position du point T qui rend la longueur MN minimale. Créer les affichages (longueurs, angles...) qui peuvent aider à résoudre le problème.
- b) Réfléchir à des éléments de preuve.

## Aide à la construction avec le logiciel CABRI GÉOMÈTRE II plus

En haut de l'écran apparaît une barre d'outils formée de plusieurs icônes que nous avons numérotées pour simplifier. Elles présentent chacune un menu auquel on accède en maintenant enfoncé le bouton de la souris.



Menu n° 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Tâches à accomplir	Aide
Créer un carré de côté 6cm	On peut faire la construction dans le repère proposé par le logiciel. Pour dessiner ce repère, sélectionner le menu <b>11</b> . Choisir « Montrer les axes » puis « Grille » (l'icône ci-contre apparaît). Déplacer le pointeur vers les axes jusqu'à obtenir le message « Ces axes » puis cliquer. Pour créer les sommets du carré, sélectionner dans le menu <b>2</b> « Point sur un objet ». Placer les quatre sommets dans la grille. On peut alors « cacher les axes » grâce au menu <b>11</b> . Dans le menu <b>3</b> , choisir « Polygone » pour joindre les sommets.
Nommer	Menu <b>10</b> .
Créer le cercle	Dans le menu <b>4</b> , choisir « Cercle ». Cliquer alors sur son centre D et sur un de ses points (A ou C).
Créer l'arc AC	Dans le menu <b>4</b> , choisir « Arc ». Cliquer alors sur le point A, sur un point intermédiaire du cercle puis sur le point C. Dans le menu <b>11</b> , cacher le cercle à l'aide de « Cacher/Montrer ».
Créer un point libre sur	Dans le menu <b>2</b> , choisir « Point sur un objet ». Placer le pointeur sur l'arc et cliquer.
Créer un segment,	Menu <b>3</b> .
Créer une droite	Pour une droite particulière : menu <b>5</b> (sinon menu <b>3</b> )
Créer des points d'intersection	Dans le menu <b>2</b> , choisir « Points d'intersection » et placer le pointeur près de l'intersection. Cliquer.
Afficher une longueur	Dans le menu <b>9</b> , choisir « Distance ou longueur ». Cliquer successivement sur les deux points.
Mesurer un angle	Dans le menu <b>9</b> , choisir « Mesure d'angle ».
Supprimer un objet créé	Dans le menu <b>1</b> , choisir « Pointer ». sélectionner l'objet à supprimer et taper sur la touche <b>Suppr</b> du clavier.
Créer un style	Utiliser le menu <b>11</b> .

## LONGUEUR MINIMALE

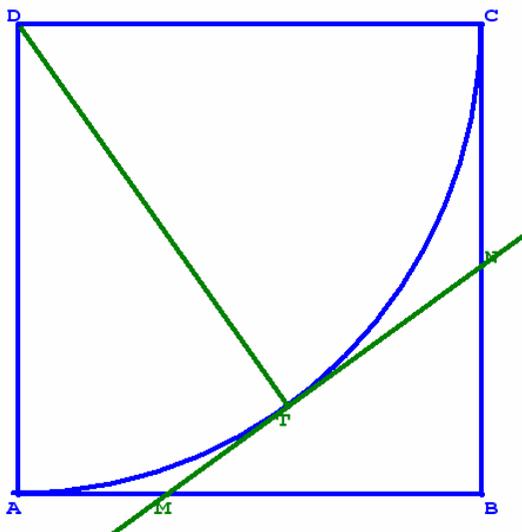
*Fiche élève*

ABCD est un carré dont le côté a pour longueur 6 cm.

$\mathcal{C}$  est le cercle de centre D passant par le point A.

T est un point mobile sur l'arc AC intérieur au carré. On prend T distinct des points A et C.

La tangente au cercle  $\mathcal{C}$  au point T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.

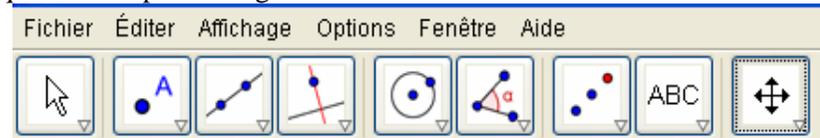


L'objectif de cet exercice est de déterminer la position du point T sur l'arc AC pour laquelle la longueur du segment [MN] est minimale.

- a)** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique plane, créer une figure qui permette de conjecturer la position du point T qui rend la longueur MN minimale. Créer les affichages (longueurs, angles...) qui peuvent aider à résoudre le problème.
- b)** Réfléchir à des éléments de preuve.

### Aide à la construction avec le logiciel GeoGebra

En haut de l'écran apparaît une barre d'outils formée de plusieurs icônes que nous avons numérotées pour simplifier. Elles présentent chacune un menu auquel on accède en cliquant sur le petit triangle en bas à droite de l'icône.



Menu n° 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tâches à accomplir	Aide
Créer un carré de côté 6cm	On peut faire la construction dans le repère proposé par le logiciel. Pour afficher ce repère, prendre le menu « Affichage » et cocher « Axes » et « Grille ». Cocher également « Fenêtre Algèbre ». Pour créer les sommets du carré, sélectionner dans le menu 2 « Nouveau point ». Placer les quatre sommets dans la grille. On peut alors cacher les axes et la grille dans le menu « Affichage » en les décochant. Pour tracer le carré, sélectionner « Polygone » dans le menu 3. Cliquer sur les sommets et terminer en cliquant de nouveau sur le premier point.
Fixer un objet	Clic droit sur l'objet et sélectionner « Propriétés »
Renommer, effacer ...	Faire un clic droit sur l'objet à modifier.
Créer l'arc AC	Dans le menu 4, choisir « Arc de cercle (centre-2points) ». Cliquer alors sur le centre, puis sur les deux extrémités en suivant l'arc dans le sens trigonométrique (Si on choisit C puis A, on obtient ici le grand arc AC).
Créer un point libre sur un objet	Dans le menu 2, choisir « Nouveau point », placer le pointeur sur l'objet et cliquer. Pour piloter le point à la souris : menu 1
Créer un segment	Menu 3.
Créer une droite	Pour une droite particulière : menu 4 (sinon menu 3)
Créer des points d'intersection	Dans le menu 2, choisir « Intersection entre deux objets » et cliquer sur chacun des deux objets.
Afficher une longueur, une mesure d'angle	Utiliser le menu 6. Dans le menu « Options », on peut alors modifier le nombre de décimales, l'unité de mesure d'angle ...
Agrandir, déplacer ...	Menu 9.

Pour créer les objets, on peut aussi utiliser le « Champ de saisie » et « La liste des commandes » à condition de les cocher dans le menu « Affichage ».